



NOÇÕES DE PROBABILIDADE

prof. André Aparecido da Silva

anndrepr@yahoo.com.br

TEORIA DAS PROBABILIDADES

A teoria das probabilidades busca estimar as chances de ocorrer um determinado acontecimento.

É um ramo da matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Experimento Aleatório

- **Experimento aleatório** é um procedimento cujo resultado é **incerto**
- Exemplos:
 - **Jogar uma moeda**
 - **Sortear um número inteiro de um a cem**
 - **Lançar um dado**

Espaço amostral

(ou de probabilidades)

- O conjunto de **todos os possíveis resultados** de um experimento aleatório é o **espaço amostral** (S)
 - Jogar uma moeda
 - $S = \{\text{cara, coroa}\}$
 - Sortear um número inteiro de um a cem
 - $S = \{1, 2, \dots, 100\}$
 - Lançar um dado
 - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento

- **Evento** é qualquer **subconjunto** do espaço amostral
 - $E = \{\text{cara}\}$ (sortear cara)
 - $E = \{25, 27, 26\}$ (sortear no. entre 24 e 28)
 - $E = \{3, 5, 1\}$ (lançar no. impar no dado)

Resumindo...

- Experimento aleatório: É um experimento que pode apresentar resultados diferentes, quando repetido nas mesmas condições.
- Espaço amostral: É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Indicamos o espaço amostral por Ω .
- Evento: Chama-se evento a qualquer subconjunto do espaço amostral.
- Obs.: Dizemos que um espaço amostral é equiprovável quando seus elementos têm a mesma chance de ocorrer.

2. Eventos certo, impossível e mutuamente exclusivos

- Evento certo: Ocorre quando um evento coincide com o espaço amostral.
- Evento impossível: Ocorre quando um evento é vazio.

Exemplos:

Ex.: 1 Lançar um dado e registrar os resultados:

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento A: Ocorrência de um número menor que 7 e maior que zero.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Portanto $A = \Omega$, logo o evento é certo.

Evento B: Ocorrência de um número maior que 6.

$$B = \emptyset$$

Não existe número maior que 6 no dado, portanto o evento é impossível.

Evento C: Ocorrência de um número par.

$$C = \{2, 4, 6\}$$

Evento D: Ocorrência de múltiplo de 3.

$$D = \{3, 6\}$$

Evento E: Ocorrência de número par ou número múltiplo de 3.

$$E = C \cup D \Rightarrow E = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} \Rightarrow$$

$$E = \{2, 3, 4, 6\} - \text{União de eventos}$$

Evento F: Ocorrência de número par e múltiplo de 3.

$$F = C \cap D \Rightarrow F = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} \Rightarrow F = \{6\}$$

Intersecção de eventos

Evento H: Ocorrência de número ímpar

$$H = \{1, 3, 5\}$$

Obs.: C e H são chamados eventos complementares.

Observe que $C \cap H = \emptyset$. Quando a interseção de dois eventos é o conjunto vazio, eles são chamados eventos mutuamente exclusivos.

CONTEXTUALIZAÇÃO...

É possível alguém jogar na megassena e ter certeza que irá ganhar?

SIM, é possível!!!

**QUANTOS SÃO OS JOGOS POSSÍVEIS NA
MEGASSENA?**

$$\frac{60 * 59 * 58 * 57 * 56 * 55}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} =$$

QUANTOS SÃO OS JOGOS POSSÍVEIS NA MEGASSENA?

$$\frac{60 * 59 * 58 * 57 * 56 * 55}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = \frac{36045979200}{720}$$

50.063.860
de apostas diferentes

PROBABILIDADE DE OCORRER UM EVENTO

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplos

Ex.: 1 Consideremos o experimento Aleatório do lançamento de um moeda perfeita. Calcule a probabilidade de sair cara.

Espaço amostral: $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\} \Rightarrow n(\Omega) = 2$

Evento A: $A = \{\text{cara}\} \Rightarrow n(A) = 1$

Como $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, temos $P(A) = \frac{1}{2}$ ou $0,50 = 50\%$

Ex.: 2 No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de sair número maior do que 4?

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

Evento A: $A = \{5, 6\} \Rightarrow n(A) = 2$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

Ex.: 3 No lançamento simultâneo de 3 moedas perfeitas distinguíveis, qual é a probabilidade de serem obtidas:

a) Pelo menos 2 caras?

b) Exatamente 2 caras?

C = cara K = coroa

$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK\} \Rightarrow$

$n(\Omega) = 8$

$A = \{CCC, CCK, CKC, KCC\} \Rightarrow n(A) = 4$

$$\text{a) } A = \{CCC, CCK, CKC, KCC\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$\text{b) } B = \{CCK, CKC, KCC\} \Rightarrow n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5$$

Ex.: 4 Vamos formar todos os números de 3 algarismos distintos, permutando os dígitos 7, 8 e 9. Qual é a probabilidade de, escolhendo um número desses ao acaso, ele ser:

- a) ímpar b) par? c) múltiplo de 6?
- d) múltiplo de 4? e) maior que 780?

$$\Omega = \{789, 798, 879, 897, 978, 987\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$$

a) Evento A: ser ímpar $\Rightarrow A = \{789, 879, 897, 987\}$
 $\Rightarrow n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,66 = 66\%$$

b) Evento B: ser par $\Rightarrow B = \{798, 978\} \Rightarrow n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33 = 33\%$$

c) Evento C: ser múltiplo de 6 $\Rightarrow C = \{798, 978\}$

$$P(C) = \frac{2}{6} = 0,33 = 33\%$$

d) Evento D: ser múltiplo de 4 $\Rightarrow D = \emptyset \Rightarrow n(D) = 0$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0 = 0\%$$

e) Evento E: ser maior que 780 $\Rightarrow E = \Omega \Rightarrow n(E) = 6$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$$

Ex.: 5: Consideremos todos os números naturais de 4 algarismos distintos que se podem formar com os algarismos 1, 3, 4, 7, 8 e 9. Escolhendo um deles ao acaso, qual é a probabilidade de sair um número que comece por 3 e termine por 7?

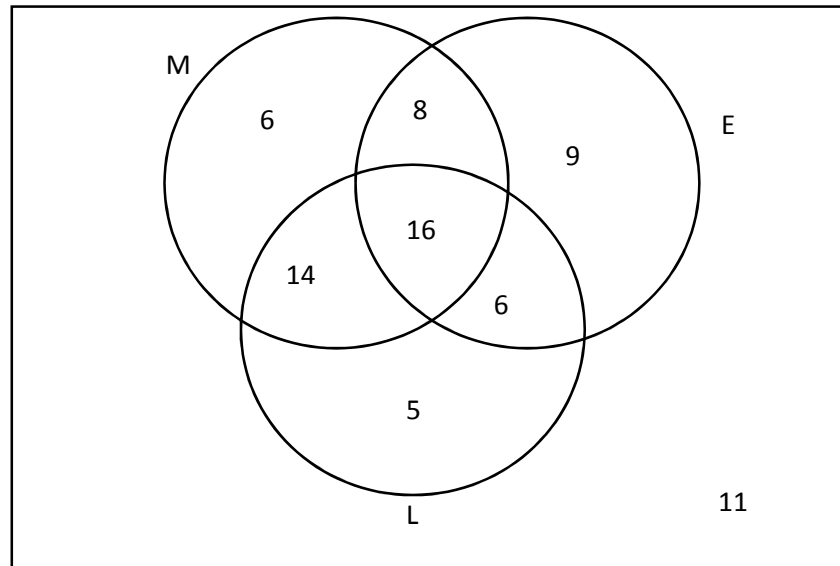
$$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad n(\Omega) = A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 360$$

$$3 \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad 7 \quad n(A) = A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{12}{360} = \frac{1}{30} \cong 0,033 = 3,33\%$$

Exemplo 6: Num grupo de 75 jovens, 16 gostam de música, esporte e leitura; 24 gostam de música e esporte; 30 gostam de música e leitura; 22 gostam de esporte e leitura; 6 gostam somente de música; 9 gostam somente de esporte e 5 gostam somente de leitura. CALCULE a probabilidade de escolher, ao acaso, um desses jovens:

- a) ele gostar de música;
- b) ele não gostar de nenhuma dessas atividades.



$$n(\Omega) = 75$$

$$\text{gostam de música: } 6 + 8 + 16 + 14 = \mathbf{44}$$

não gostam de nenhuma dessas atividades:

$$75 - (6 + 9 + 5 + 8 + 6 + 14 + 16) = 75 - 64 = \mathbf{11}$$

a) a probabilidade de gostar de música:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{44}{75} \cong 58\%$$

b) probabilidade de não gostar de nenhuma dessas atividades:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{11}{75} \cong 14\%$$

PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Consideremos dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω . Da teoria dos conjuntos sabemos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

- Dividindo os membros da equação por $n(\Omega)$, temos:
$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo 7 : No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter o número 3 ou um número ímpar?

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

Evento A: número 3 $\Rightarrow A = \{3\} \Rightarrow n(A) = 1$

Evento B: número ímpar $\Rightarrow b = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(B) = 3$

$$A \cap B = \{3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{3\}$$

$$n(A \cap B) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6}$$

Exemplo 8: Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que essa carta seja vermelha ou um ás?

$$n(\Omega) = 52$$

Evento A: a carta é vermelha $\Rightarrow n(A) = 26$

Evento B: a carta é ás $\Rightarrow n(B) = 4$

$$n(A \cap B) = 2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{28}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{13} \cong 53,8\%$$

PROBABILIDADE DO EVENTO COMPLEMENTAR

A probabilidade de não ocorrer o evento A é a probabilidade de ocorrer o evento complementar de A , representado por $\bar{A}$.

Nessas condições, temos :

$$A \cup \bar{A} = \Omega \text{ e } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A})$$

$$\text{Então, } 1 = P(A) + P(\bar{A}) \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Exemplo 9: No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos distinguíveis, vamos calcular a probabilidade de NÃO sair soma 5.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}. \Rightarrow n(\Omega) = 36.$$

Seja A o evento “sair soma 5”. Então:

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{9}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{8}{9}$$

Exemplo 10: Uma máquina produziu 50 parafusos dos quais 5 eram defeituosos. Ao pegar ao acaso 3 parafusos, qual é a probabilidade de que:

- a) Os três sejam perfeitos?
- b) Os três sejam defeituosos?
- c) Pelo menos um seja defeituoso?

$n(\Omega) = n^0$ de combinações de 50 elementos tomados 3 a 3.

$$n(\Omega) = C_{50,3} = \frac{50!}{3!(50-3)!} = \frac{50!}{3!.47!} = \frac{50.49.48.47!}{6.47!} = 19.600$$

a)evento A: os três parafusos são perfeitos

$$n(A) = C_{45,3} = \frac{45!}{3!(45-3)!} = \frac{45.44.43.42!}{6.42!} = 14190$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{14190}{19600} \cong 0,72398 \quad \text{ou} \quad 72,4\%$$

b) evento B: os três parafusos são defeituosos

$$n(B) = C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4.3!}{3!.2!} = 10$$

c) evento C: pelo menos um é defeituoso, o que corresponde ao complementar de A (os três são perfeitos). Logo:

$$P(A) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{19600} \cong 0,00005 \quad \text{ou} \quad 0,005\%$$

$$P(C) = P(\bar{A})$$

$$P(C) = 1 - P(A)$$

$$P(C) = 1 - 0,72398$$

$$P(C) = 0,27602 \quad \text{ou} \quad \cong 27,6\%$$